

Il faut se connaître soi-même — Pascal, *Pensées*

Programme couvert : notation et manipulation des sommes, linéarité et découpage, changement d'indice, coefficients binomiaux et formule du binôme, sommes doubles, sommes classiques, suites arithmétiques et géométriques, identités remarquables, carré d'une somme.

Exercice 1 – Sommes arithmético-géométriques

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^n k x^k, \quad C_n(x) = \sum_{k=0}^n k^2 x^k.$$

1. Rappeler la valeur de $A_n(x)$.
2. Montrer que

$$B_n(x) = \frac{x(1 - (n+1)x^n + nx^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

Indication M1 : dériver.

Indication M2 : calculer $(1-x)B_n(x)$ à l'aide d'un *changement d'indice* judicieux.

3. En déduire une expression de $C_n(x)$.

Indication M1 : réutiliser $B_n(x)$ en dérivant une nouvelle fois.

Indication M2 : s'inspirer de la méthode précédente : on écrira $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$. Puis exprimer $(1-x)C_n(x)$ en fonction de $A_n(x)$, $B_n(x)$, n et x .

4. **Application.** Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur exacte de

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}.$$

Que peut-on conjecturer sur le comportement de S_n lorsque n devient grand ?

5. **Bonus.** Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^n k^p x^k$. Chercher une expression générale de $S_{n,p}(x)$. *Indice :* réfléchir à l'effet de l'opérateur $x \frac{d}{dx}$.

Exercice 2 – Coefficients binomiaux, formule de Vandermonde

1. Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq m+n$. Démontrer la **formule de Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

Indication : considérer le développement de $(1+X)^{m+n} = (1+X)^m(1+X)^n$ dans $\mathbb{R}[X]$. Utiliser le binôme de Newton.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Indication : appliquer la formule de Vandermonde.

3. On souhaite calculer $S = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2$.

a) Démontrer l'identité $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$.

b) Montrer que

$$S = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

Indication 1 : effectuer un changement d'indice

Indication 2 : utiliser la formule de Vandermonde

c) Montrer enfin que $S = \frac{n}{2} \binom{2n}{n}$.

4. **Bonus** : refaire 1) et 2) avec un raisonnement par dénombrement.

Exercice 3 – Identité de Lagrange et inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels.

1. Démontrer l'**identité de Lagrange**.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Indication : développer à l'aide de sommes doubles les quantités $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)$ et $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$

2. En déduire l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** et préciser le cas d'égalité. *Rappel* :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right),$$

3. **Application.** En appliquant l'inégalité précédente à $a_i = i$ et $b_i = 1$ pour $1 \leq i \leq n$, retrouver

une inégalité liant $\left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$ et $\sum_{i=1}^n i^2$. Pour quelle(s) valeur(s) de n a-t-on égalité ?