

Fiche Méthode

Calcul intégral — Techniques d'intégration

Comment attaquer (presque) n'importe quelle intégrale ?

1 Arbre de décision général

Stratégie générale face à $\int f(x) dx$

1. **Reconnaître une primitive usuelle** directement (tableau ci-dessous).
2. **Simplifier** l'écriture : linéariser, factoriser, développer, utiliser une identité remarquable ou trigonométrique.
3. **Repérer une forme** $u' \times g(u) \Rightarrow$ primitive composée immédiate.
4. **Produit de deux fonctions de nature différente** (polynôme $\times$ exp/ln/trigo) $\Rightarrow$ **intégration par parties (IPP)**.
5. **Présence d'une racine, d'une fraction rationnelle en sin, cos, ou d'une expression composée** $\Rightarrow$ **changement de variable**.
6. **Fraction rationnelle en x** $\Rightarrow$ **décomposition en éléments simples**.
7. **Intégrale impropre** $\Rightarrow$ étudier la convergence *avant* tout calcul.
8. **Rien ne marche** $\Rightarrow$ dérivation sous le signe somme, intégrale à paramètre, fonctions spéciales (Γ , B), symétries, ou passage en dimension 2.

2 Primitives usuelles à connaître par cœur

Fonction	Primitive
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
e^x	e^x
$\cos x, \sin x$	$\sin x, -\cos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ (x > 1)$	$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$u' u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u' e^u$	e^u
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\arctan x$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right $
$u' \cos u, u' \sin u$	$\sin u, -\cos u$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin u$

3 Intégration par parties (IPP)

Formule

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx$$

Quand l'utiliser ?

- Produit **polynôme** $\times$ **exponentielle** : dériver le polynôme (il finit par disparaître).
- Produit **polynôme** $\times$ $\sin / \cos$: dériver le polynôme.
- Présence de $\ln x$ ou $\arctan x$, $\arcsin x$: les considérer comme v (on dérive $\ln x \rightarrow 1/x$, ce qui simplifie), et $u' = 1$ (primitive $u = x$).
- IPP **répétées** (ex. $\int x^2 e^x \, dx$) ou IPP **cyclique** qui redonne l'intégrale de départ (ex. $\int e^x \cos x \, dx$: on refait l'IPP deux fois puis on résout l'équation en I).

4 Changements de variable

Formule

Si φ est $\mathcal{C}^1$ bijective de $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

Changements de variable classiques à mémoriser

- $\sqrt{a^2 - x^2}$: poser $x = a \sin t$ (ou $a \cos t$).
- $\sqrt{a^2 + x^2}$: poser $x = a \operatorname{sh} t$.
- $\sqrt{x^2 - a^2}$: poser $x = a \operatorname{ch} t$.
- Fraction rationnelle en e^x : poser $t = e^x$.
- Fraction rationnelle en $\sqrt[n]{x}$: poser $t = x^{1/n}$ (ou plus généralement le PPCM des indices de racines).
- Fraction rationnelle en $\operatorname{sh}, \operatorname{ch}$: poser $t = e^x$ ou $t = \operatorname{th}(x/2)$.

Règles de Bioche (fractions rationnelles en sinus et cosinus)

On étudie l'invariance de $\omega(x) = f(\sin x, \cos x) \, dx$:

- Invariant par $x \rightarrow -x$ (donc $\omega(-x) = \omega(x)$) $\Rightarrow$ poser $t = \cos x$.
- Invariant par $x \rightarrow \pi - x \Rightarrow$ poser $t = \sin x$.
- Invariant par $x \rightarrow \pi + x \Rightarrow$ poser $t = \tan x$.
- Aucune symétrie $\Rightarrow$ poser $t = \tan(x/2)$ (change $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$) — universel mais souvent calculatoire.

5 Fractions rationnelles

Méthode générale

- Si $\deg P \geq \deg Q$: effectuer la **division euclidienne** $P = QD + R$.
- Factoriser** le dénominateur Q sur $\mathbb{R}$ (racines réelles, facteurs $x^2 + px + q$ irréductibles).
- Décomposer en éléments simples** :

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum \frac{a_i}{(x - r_i)^k} + \sum \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^k}$$

- Intégrer terme à terme :

$$- \int \frac{a}{x - r} dx = a \ln |x - r|$$

$$- \int \frac{a}{(x - r)^k} dx = \frac{-a}{(k - 1)(x - r)^{k-1}} \text{ pour } k \geq 2$$

$$- \int \frac{bx + c}{x^2 + px + q} dx : \text{faire apparaître } u'/u \text{ pour la partie } bx, \text{ puis se ramener à arctan après mise sous forme canonique pour le reste.}$$

6 Intégrales impropres (généralisées)

Avant de calculer : étudier la convergence !

- Critère de comparaison** : $0 \leq f \leq g$ et $\int g$ converge $\Rightarrow \int f$ converge.
- Équivalents** : si $f \sim g$ au voisinage du point à problème et f, g de signe constant, même nature.
- Intégrales de Riemann de référence** : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$; $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$.
- Intégration par parties / changement de variable** restent valables sous hypothèses de convergence — toujours le justifier proprement.
- Pour une intégrale **semi-convergente** (ex. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$), ne pas chercher l'absolue convergence : utiliser une IPP pour gagner en décroissance.

7 Techniques avancées

Dérivation sous le signe intégrale (intégrale à paramètre)

Pour $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$, sous hypothèses de régularité et de domination :

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

Très utile pour calculer des intégrales sans primitive élémentaire (ex. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx) dx$, intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ via $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$).

Intégrales de Wallis

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx, \quad (n+1)W_{n+1} W_n \text{ liés par récurrence :}$$

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$$

Utile pour des puissances entières de sin ou cos sur $[0, \pi/2]$.

Fonctions Gamma et Bêta d'Euler

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt, \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Permet de retrouver rapidement de nombreuses intégrales classiques (intégrale de Gauss, intégrales de Wallis, etc.) par changement de variable adéquat.

Exploiter les symétries

- Si f est paire/impair sur un intervalle symétrique $[-a, a]$.
- Astuce du « $x \rightarrow a-x$ ou $x \rightarrow a+b-x$ » sur $[a, b]$ pour faire apparaître deux fois la même intégrale (ex. $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} \, dx$).
- Passage en **coordonnées polaires** pour les intégrales doubles associées (méthode historique de l'intégrale de Gauss, cf. plus bas).

8 Récapitulatif express

Vous voyez...	Vous pensez...
Polynôme $\times e^x, \sin, \cos$	IPP
$\ln x, \arctan x, \arcsin x$ seuls	IPP avec $u' = 1$
$\frac{u'}{u}$ ou $u'e^u$ ou $u'u^\alpha$	Primitive composée immédiate
Fraction rationnelle en x	Éléments simples
Fraction rationnelle en $\sin, \cos$	Règles de Bioche
$\sqrt{a^2 \pm x^2}, \sqrt{x^2 - a^2}$	Changement trigo / hyperbolique
Paramètre t dans l'intégrale	Dérivation sous $\int$
Bornes infinies ou singularité	Étudier la convergence d'abord !

Quelques intégrales célèbres à connaître

Nom	Valeur
Intégrale de Gauss	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
Intégrale de Dirichlet	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$
Intégrale de Fresnel	$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Problème de Bâle	$\int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x} dx = \frac{\pi^2}{6}$
Intégrale de Wallis (n=2)	$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$
Intégrale de Cauchy	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$
Fonction Gamma en 1/2	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}$
Constante d'Euler-Mascheroni	$\int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \gamma$
Intégrale d'Ahmed	$\int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}} dx = \frac{5\pi^2}{96}$