

Fiche de rappels — Inégalité de Cauchy–Schwarz

Alexis VO, CentraleSupélec

0. Cadre

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (bilinéaire symétrique défini positif si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ses-
quilinéaire hermitien défini positif si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme associée.

1. Énoncé

Théorème (Cauchy–Schwarz)

Pour tous $x, y \in E$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Il y a égalité si, et seulement si, (x, y) est liée (c'est-à-dire x et y colinéaires).

Démonstration (cas réel). Si $y = 0$ c'est trivial. Sinon, pour $t \in \mathbb{R}$, posons

$$P(t) = \|x + ty\|^2 = \|y\|^2 t^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|x\|^2 \geq 0.$$

P est un trinôme de signe constant sur $\mathbb{R}$: son discriminant réduit $\Delta' = \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$, d'où le résultat. Égalité $\iff \Delta' = 0 \iff P$ admet une racine $t_0 \iff x + t_0 y = 0$.

Cas complexe. Si $\langle x, y \rangle \neq 0$, écrire $\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| e^{i\theta}$ et appliquer le cas réel à $u = e^{-i\theta} x$ et y (on a $\langle u, y \rangle = |\langle x, y \rangle| \in \mathbb{R}$ et $\|u\| = \|x\|$).

À retenir : c'est la méthode du *trinôme en t* qui est la démonstration canonique — elle se généralise (Cauchy–Schwarz discret, intégral, etc.) sans rien changer à l'idée.

2. Déclinaisons usuelles

$\mathbb{R}^n$ euclidien

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

$\mathbb{C}^n$ hermitien

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$$

Séries (ℓ^2)

Si $(x_n), (y_n) \in \ell^2(\mathbb{K})$:

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n^2 \right)^{1/2}$$

La série $\sum x_n y_n$ converge (absolument) : $\ell^2 \cdot \ell^2 \subset \ell^1$.

Intégrales (L^2)

Pour $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ (ou L^2) :

$$\left| \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \right| \leq \left(\int_a^b |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g|^2 \right)^{1/2}$$

Variables aléatoires (L^2 proba)

Pour X, Y v.a. réelles admettant un moment d'ordre 2 :

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}, \quad |\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y.$$

Matrices (Frobenius)

Pour $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, avec $\langle A, B \rangle_F = \text{tr}(A^\top B)$:

$$|\text{tr}(A^\top B)| \leq \|A\|_F \|B\|_F, \quad \|A\|_F = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

3. Cas d'égalité par cadre

- $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$: x et y colinéaires.
- Fonctions continues : f et g proportionnelles *partout*.
- Fonctions L^2 (intégrale de Lebesgue) : $f = \lambda g$ *presque partout*.
- Suites ℓ^2 : (x_n) et (y_n) proportionnelles.
- Variables aléatoires : X et Y affinement liées presque sûrement ($Y = aX + b$ p.s.) pour la version covariance.

4. Applications classiques

a) Inégalité triangulaire

$d(x, y) = \|x - y\|$ vérifie l'inégalité triangulaire grâce à Cauchy–Schwarz :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2.$$

C'est ce qui légitime le nom de norme pour $\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

b) Angle / cosinus

Dans E réel, CS permet de définir l'angle θ entre $x, y \neq 0$ par

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [-1, 1].$$

c) Corrélation bornée

Le coefficient de corrélation $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ vérifie $\rho \in [-1, 1]$: conséquence directe de CS appliqué à $X - \mathbb{E}X$ et $Y - \mathbb{E}Y$.

d) Formes linéaires continues / Riesz

Pour $a \in E$ (Hilbert), la forme $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$ est continue de norme $\|\varphi\| = \|a\|$: $\leq$ par CS, $\geq$ en évaluant en $x = a$. Sert de brique au théorème de représentation de Riesz.

e) Norme subordonnée

Pour majorer une norme d'opérateur $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$, CS est l'outil standard pour obtenir des majorations $\|u(x)\| \leq C\|x\|$ dans les espaces de fonctions ou de matrices.

f) Inégalité de Cauchy discrète

Avec $y_i = 1$ pour tout i dans le cas $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (\text{i.e. } \bar{x}^2 \leq \overline{x^2}),$$

version élémentaire de l'inégalité arithmético-quadratique.

g) Optimisation linéaire sous contrainte

$\max_{\|x\| \leq 1} \langle a, x \rangle = \|a\|$, atteint en $x = a/\|a\|$ (cas d'égalité de CS)
: principe à la base de nombreux problèmes de dualité et de calibrage de contrainte.

h) Régression linéaire / R^2

Le coefficient de détermination $R^2 = \rho(X, Y)^2 \in [0, 1]$ en régression simple découle directement de $|\rho| \leq 1$ (point c).

i) Généralisation : Hölder

CS est le cas $p = q = 2$ de l'inégalité de Hölder $|\sum x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ — bon réflexe si un énoncé ressemble à CS mais avec des puissances $\neq 2$.

5. Pièges fréquents

- Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ utilisé est bien un *vrai* produit scalaire (positivité + séparation) avant d'invoquer CS.
- Cas complexe : ne pas oublier la conjugaison $\overline{y_i}$ (resp. $\overline{g}$) dans le produit scalaire.
- Toujours traiter $y = 0$ à part dans la démonstration par trinôme.
- Ne pas confondre l'inégalité *ponctuelle* ($f \leq g$) avec l'inégalité *intégrale/globale* donnée par CS.
- Pour l'égalité en L^2 (Lebesgue) : presque partout, pas partout.

6. Mémo express

Formulaire éclair

- Général : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$
- $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$: $|\sum x_i y_i| \leq \sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2}$
- Intégrales : $|\int f g| \leq \sqrt{\int f^2} \sqrt{\int g^2}$
- Probas : $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y, \quad \rho \in [-1, 1]$
- Cauchy discret : $(\sum x_i)^2 \leq n \sum x_i^2$
- Généralisation : Hölder (p, q conjugués, CS = cas $p = q = 2$)
- Égalité $\iff$ colinéarité (ou proportionnalité p.p. en L^2)