

Probabilités – Espérance, Variance et Indépendance

Règle fondamentale : l'espérance est linéaire ; la variance ne l'est pas.

1. ESPÉRANCE – LINÉARITÉ

$$\mathbb{E}[aX + bY + c] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] + c$$

Condition : aucune indépendance nécessaire, seulement l'existence des espérances.

Situation	Résultat	Indépendance ?
Somme	$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$	Non
Combinaison linéaire	$\mathbb{E}[\sum_i a_i X_i] = \sum_i a_i \mathbb{E}[X_i]$	Non
Indicatrice	$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A)$	Non
Somme d'indicateurs	$\mathbb{E}[\sum_i \mathbf{1}_{A_i}] = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$	Non

2. VARIANCE – ATTENTION À L'INDÉPENDANCE

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Situation	Formule	Condition
Constante	$\text{Var}(c) = 0$	Toujours
Multiplication par a	$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$	Toujours
Translation	$\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X)$	Toujours
Somme	$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$	Toujours
Somme indépendante	$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$	$X \perp Y$
Somme de n variables indépendantes	$\text{Var}(\sum_i X_i) = \sum_i \text{Var}(X_i)$	Indépendance

3. PRODUIT – QUAND UTILISER L'INDÉPENDANCE ?

Situation	Résultat	Condition
Produit	$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$	$X \perp Y$
Produit au carré	$\mathbb{E}[X^2Y^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$	$X \perp Y$
Covariance	$\text{Cov}(X, Y) = 0$	$X \perp Y \Rightarrow$
Variance d'une somme	$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$	$X \perp Y$
Variance d'un produit	$\text{Var}(XY) = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2\mathbb{E}[Y]^2$	$X \perp Y$

Attention :

$$X \perp Y \implies \text{Cov}(X, Y) = 0 \implies \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

$\text{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X \perp Y$

4. RÉFLEXES À AVOIR EN EXERCICE / QCM

Si je vois...	Je pense à...	Formule réflexe
$\mathbb{E}[X + Y]$	Linéarité	$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
$\mathbb{E}[aX + bY]$	Linéarité	$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
$\text{Var}(X + Y)$	Covariance / indépendance	$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$
X, Y indépendantes + $\text{Var}(X + Y)$	Variance d'une somme	$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$
X, Y indépendantes + $\mathbb{E}[XY]$	Factorisation	$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

SOMME + ESPÉRANCE $\Rightarrow$ LINÉARITÉ

SOMME + VARIANCE $\Rightarrow$ INDÉPENDANCE / COVARIANCE

PRODUIT + ESPÉRANCE $\Rightarrow$ INDÉPENDANCE