

Récapitulatif : Structures Algébriques et Topologiques

Alexis VO, CentraleSupélec

2026-2027

Notion	Objet mat	Axiomes / Définition	Propriétés / Remarques
Esp vectoriel	$(E, +, \cdot)$ E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	- Loi interne $+$: associative, commutative, élément neutre 0, opposé. - Loi externe $\cdot$: $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $1x = x$, distributivité.	- Structure purement algébrique. - Ne permet pas de parler de distance, de limite ou de continuité sans structure supplémentaire.
Esp métrique	(E, d) $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$	1. Séparation : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 2. Symétrie : $\forall x, y, d(x, y) = d(y, x)$ 3. Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$	- Positivité : $d(x, y) \geq 0$ (découle de 2 et 3). - Ne nécessite pas de structure vectorielle (ex : ensembles quelconques, sphère).
EVN	$(E, \ \cdot\)$ E muni d'une norme	- Espace vectoriel E - Muni d'une application $\ \cdot\ $ vérifiant les axiomes de la norme (ci-dessous).	- Combine une structure algébrique (EV) et topologique (via la norme). - Tout EVN est naturellement un espace métrique.
Norme	$\ \cdot\ : E \rightarrow \mathbb{R}$ (sur un EVN E)	1. Séparation : $\ x\ = 0 \implies x = 0$ 2. Homogénéité : $\ \lambda x\ = \lambda \ x\ $ 3. Inégalité triangulaire : $\ x + y\ \leq \ x\ + \ y\ $	- Positivité : $\ x\ \geq 0$ - Valeur en zéro : $\ 0\ = 0$ - Inégalité triangulaire inverse : $ \ x\ - \ y\ \leq \ x - y\ $
Dist induite	$d(x, y) = \ x - y\ $ (provenant d'une norme)	Vérifie par construction les axiomes d'une distance grâce aux propriétés de la norme : - Séparation $\iff$ séparation de la norme - Symétrie $\iff$ homogénéité ($\lambda = -1$) - Inégalité triangulaire $\iff$ inég. triangulaire	- Attention : Toute distance ne provient pas d'une norme (ex : distance discrète, espace non vectoriel). - Dans un EVN, $\bar{B}(x, \epsilon) = \overline{B(x, \epsilon)}$ (adhérence vraie).