Fiche d'entraînement

Choisir un ε (ou un δ) judicieux

Alexis VO, CentraleSupélec

Consigne. Pour chaque exercice, rédiger une preuve complète en ε (et/ou δ). Le point important n'est pas seulement d'arriver au résultat, mais d'expliciter **comment** le ε (ou le δ) est choisi : on part de l'inégalité finale voulue, et on *remonte* jusqu'au choix qui la rend vraie.

1. **(Somme de limites)** Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \to l$ et $v_n \to l'$. Montrer que $u_n + v_n \to l + l'$.

2. **(Produit de limites)** Avec les mêmes notations, montrer que $u_n v_n \to ll'$. *Indication : une suite convergente est bornée ; on pourra écrire* $u_n v_n - ll' = u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)$.

3. **(Continuité de $x \mapsto x^2$)** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer, directement avec ε et δ (sans invoquer un théorème général sur les produits de fonctions continues), que $f : x \mapsto x^2$ est continue en x_0.

4. **(Permanence du signe)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en x_0, avec $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \qquad f(x) > 0.$$

5. **(Limite et $\limsup$)** Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\limsup_n u_n = \liminf_n u_n = l.$$

$\star$ **(Bonus — continuité de $\sqrt{\cdot}$)** Soit $x_0 > 0$. Montrer, avec ε et δ, que $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en x_0. *Indication : pour* $x \geq 0$, $\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$. *Il faudra d'abord restreindre* δ *pour garantir* $x > 0$ *et minorer le dénominateur.*

Corrigé

1. Somme de limites

Preuve. On veut $|(u_n+v_n)-(l+l')| < \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire :

$$|(u_n+v_n)-(l+l')| \leq |u_n-l| + |v_n-l'|.$$

On a une somme de **deux** termes à rendre $< \varepsilon$ au total : on répartit le budget en deux, chaque terme devant être $< \varepsilon/2$.

Par convergence de (u_n) : $\exists N_1,\ \forall n \geq N_1,\ |u_n-l| < \varepsilon/2$. Par convergence de (v_n) : $\exists N_2,\ \forall n \geq N_2,\ |v_n - l'| < \varepsilon/2$.

Pour $n \geq N := \max(N_1, N_2)$:

$$|(u_n+v_n)-(l+l')| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Le $\varepsilon/2$ vient uniquement du nombre de termes (2) dans l'inégalité triangulaire.

2. Produit de limites

Preuve. (u_n) convergente $\Rightarrow$ bornée : $\exists M > 0,\ \forall n,\ |u_n| \leq M$.

$$|u_nv_n - ll'| = |u_n(v_n-l') + l'(u_n-l)| \leq M|v_n-l'| + |l'|\,|u_n-l|.$$

On veut cette somme $< \varepsilon$: on répartit encore le budget en deux, mais cette fois il faut **diviser aussi par la constante** qui multiplie chaque terme :

$$M|v_n-l'| < \tfrac{\varepsilon}{2} \iff |v_n-l'| < \tfrac{\varepsilon}{2M}, \qquad |l'|\,|u_n-l| < \tfrac{\varepsilon}{2} \iff |u_n-l| < \tfrac{\varepsilon}{2(|l'|+1)}$$

(le $+1$ évite une division par 0 si $l' = 0$). On choisit alors N_1 tel que $\forall n \geq N_1,\ |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2M}$, et N_2 tel que $\forall n \geq N_2,\ |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2(|l'|+1)}$. Pour $n \geq N = \max(N_1, N_2)$, la somme est $< \varepsilon$. ■

Le ε cible pour chaque sous-terme n'est plus « brut » : il est divisé par la constante (M ou $|l'|+1$) qui apparaît devant.

3. Continuité de $x \mapsto x^2$

Preuve.

$$|x^2 - x_0^2| = |x-x_0|\,|x+x_0|.$$

Le facteur $|x+x_0|$ dépend de x, donc de δ : il faut d'abord le majorer **indépendamment de** ε. On impose $\delta \leq 1$: alors $|x-x_0| < \delta \leq 1 \Rightarrow |x| < |x_0|+1 \Rightarrow |x+x_0| \leq |x| + |x_0| < 2|x_0|+1$.

Avec cette restriction : $|x^2 - x_0^2| < \delta(2|x_0|+1)$. On veut ceci $< \varepsilon$, d'où

$$\delta = \min\left(1,\ \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right).$$

Vérification : avec ce choix, $|x-x_0| < \delta$ donne à la fois $|x+x_0| < 2|x_0|+1$ et $\delta(2|x_0|+1) \leq \varepsilon$, donc $|x^2-x_0^2| < \varepsilon$. ■

Méthode en deux temps : d'abord un $\delta \leq 1$ « de sécurité » pour borner le facteur gênant, puis un second δ pour l'inégalité finale — on garde le plus petit des deux.

4. Permanence du signe

Preuve. Continuité en x_0 : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x-x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, i.e.

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

On veut $f(x) > 0$, donc il suffit que $f(x_0) - \varepsilon \geq 0$, idéalement > 0. Comme $f(x_0) > 0$, on choisit

$$\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}\ (> 0).$$

On obtient $\eta > 0$ correspondant, et pour $|x-x_0| < \eta$:

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

■

$\varepsilon = f(x_0)/2$ est le choix « symétrique » naturel ; n'importe quel $\varepsilon \in]0, f(x_0)[$ aurait fonctionné.

5. Limite et $\limsup/\liminf$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque (on ne fixe pas une valeur précise ici : on conclut en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ à la fin). Par convergence, $\exists N,\ \forall n \geq N,\ l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$. Donc :

$$\sup_{k \geq N} u_k \leq l + \varepsilon \quad \text{et} \quad \inf_{k \geq N} u_k \geq l - \varepsilon.$$

Par décroissance de $\left(\sup_{k \geq n} u_k\right)_n$ et croissance de $\left(\inf_{k \geq n} u_k\right)_n$:

$$\limsup_n u_n \leq \sup_{k > N} u_k \leq l+\varepsilon, \qquad \liminf_n u_n \geq \inf_{k \geq N} u_k \geq l-\varepsilon.$$

Comme toujours $\liminf u_n \leq \limsup u_n$, on obtient, pour **tout** $\varepsilon > 0$:

$$l - \varepsilon \leq \liminf_n u_n \leq \limsup_n u_n \leq l + \varepsilon.$$

En faisant $\varepsilon \to 0$: $\liminf u_n = \limsup u_n = l$. ■

Ici pas de valeur unique d'ε : on garde ε générique et on conclut par un passage à la limite $\varepsilon \to 0$ à la toute fin.

⋆ Bonus : continuité de $\sqrt{\cdot}$

Preuve. Pour $x \geq 0$:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

Il faut minorer le dénominateur, donc garantir $x > 0$ (et pas trop petit). On impose $\delta \leq x_0/2$: alors $|x-x_0| < \delta \Rightarrow x > x_0/2 > 0$, donc

$$\sqrt{x} + \sqrt{x_0} > \sqrt{x_0} \quad \text{(déjà suffisant, car } \sqrt{x} \geq 0\text{)}.$$

D'où $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \dfrac{\delta}{\sqrt{x_0}}$. On veut ceci $< \varepsilon$, soit $\delta < \varepsilon\sqrt{x_0}$. On choisit donc

$$\delta = \min\left(\frac{x_0}{2},\ \varepsilon\sqrt{x_0}\right).$$

■

Même méthode qu'à l'exercice 3, mais pour un dénominateur (qu'il faut minorer loin de 0) plutôt qu'un facteur multiplicatif (qu'il fallait majorer).