

Projet Mathématiques Informatique

Labyrinthe

LDD IM - Semestre 2

Alexis VO - Théo GERVINET - Félix DRONOV



Labyrinthe du parc Sigurtà, Valeggio sul Mincio (Province de Vérone)

Janvier - Mars 2024

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Présentation du problème et enjeux	3
1.2	Pourquoi est-ce intéressant pour un projet en mathématiques informatiques?	3
2	Section 1	3
2.1	Pseudo-labyrinthes 2×2	3
2.2	Nombre maximal de murs dans un pseudo-labyrinthe de taille $n \times m$	4
2.3	Si $m = 1$, combien existe-t-il de pseudo-labyrinthes de taille $n \times 1$?	5
2.4	Formule générale pour le nombre de pseudo-labyrinthes de taille $n \times m$	5
2.5	Labyrinthes de taille 3×2	5
2.6	Observation	5
2.7	Existence d'un unique chemin vers la sortie	6
2.8	Conjectures pour qu'un pseudo-labyrinthe soit un labyrinthe	6
2.9	Conclusion	6

1 Introduction

1.1 Présentation du problème et enjeux

Ce projet consiste à aborder de manière autonome et innovante une problématique mathématique complexe en se concentrant sur l'étude des labyrinthes en tant qu'objet mathématique et en explorant leurs diverses caractéristiques.

Les enjeux du projet incluent l'exploration des propriétés mathématiques des labyrinthes, l'application de concepts mathématiques à des problèmes concrets, le développement d'algorithmes efficaces et la recherche de solutions originales en utilisant des outils informatiques.

1.2 Pourquoi est-ce intéressant pour un projet en mathématiques informatiques ?

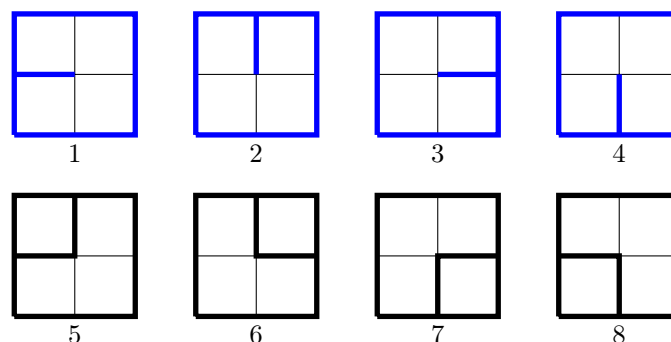
- **Application des concepts mathématiques :** Les labyrinthes sont des structures qui permettent d'appliquer divers concepts mathématiques tels que la théorie des graphes, la géométrie, la théorie des probabilités... Explorer les labyrinthes offre donc l'opportunité d'appliquer et de visualiser ces concepts dans un contexte réel.
- **Modélisation et résolution de problèmes :** Les labyrinthes peuvent être modélisés sous forme de graphes où les intersections sont des nœuds et les passages entre les intersections sont des arêtes. La recherche de chemins, la recherche de cycles, la détermination de propriétés structurelles... peuvent être des problèmes intéressants à résoudre.
- **Algorithmes et complexité :** La résolution de problèmes liés aux labyrinthes implique souvent la conception et l'analyse d'algorithmes. Par exemple, trouver le chemin le plus court pour sortir d'un labyrinthe, trouver tous les chemins possibles, ou encore générer des labyrinthes aléatoires sont des problèmes qui nécessitent des algorithmes efficaces.
- **Applications pratiques :** Les labyrinthes ont des applications pratiques dans de nombreux domaines, tels que les jeux vidéo, la robotique (par exemple, la planification de trajectoire), la cryptographie (par exemple, les labyrinthes utilisés comme tests de captchas), etc. Étudier les propriétés des labyrinthes peut donc également conduire à des applications concrètes.

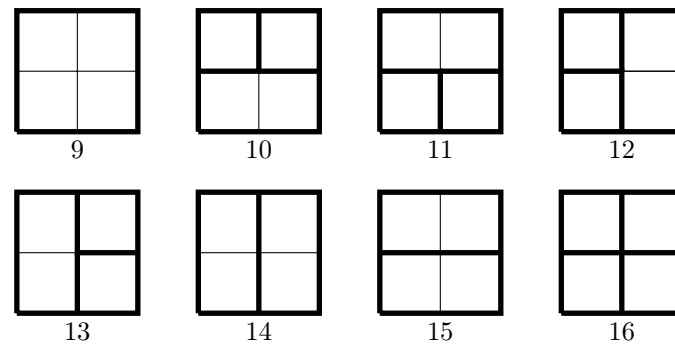
En conclusion, les labyrinthes offrent un large éventail de concepts mathématiques et informatiques, tout en ayant des applications pratiques et en favorisant une approche interdisciplinaire.

2 Section 1

2.1 Pseudo-labyrinthes 2×2

On trouve 16 pseudo-labyrinthes dont 4 sont des labyrinthes (en bleu).



FIGURE 1 – Pseudo-labyrinthes 2×2

2.2 Nombre maximal de murs dans un pseudo-labyrinthe de taille $n \times m$

On extrait la miniature 16 de la Figure 1 car c'est le nombre maximal de murs pour un pseudo-labyrinthe. On décompose ensuite cette miniature en ligne et en colonne comme ci-dessous.

Observation 2.2.1. Sur la figure 2, $n = 2$ et $m = 2$.

Sur la miniature 16A, on compte $(m - 1)n$ murs, i.e. 2 murs.

Sur la miniature 16B, on compte $(n - 1)m$ murs, i.e. 2 murs.

Le nombre total de murs est alors la somme des murs de 16A et 16B : $2 + 2 = 4$ murs.

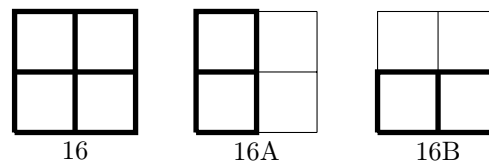
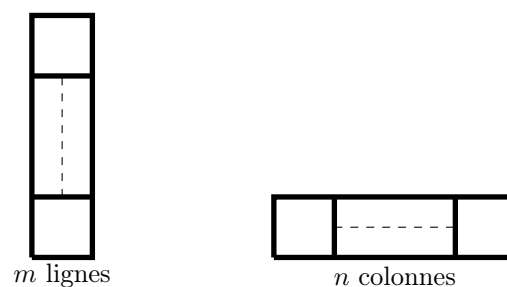


FIGURE 2 – Extraction de la miniature 16

Par induction, on a :

Affirmation 2.2.1. Dans un pseudo-labyrinthe de taille $n \times m$, le nombre maximal de murs est

$$(m - 1)n + (n - 1)m$$

FIGURE 3 – Généralisation $n \times m$

Démonstration. Un mur sert à séparer deux cellules donc pour une ligne à n colonnes, il y a au maximum $n - 1$ murs. On multiplie ce nombre par le nombre de lignes ce qui donne $(n - 1)m$ murs verticaux au maximum. En appliquant le même principe pour les murs horizontaux, on trouve $(m - 1)n$ murs au maximum. Le nombre maximal de mur est alors la somme du nombre maximal de murs horizontaux et du nombre maximal de murs verticaux. Ce qu'il fallait démontrer. $\square$

2.3 Si $m = 1$, combien existe-t-il de pseudo-labyrinthes de taille $n \times 1$?

D'après la formule trouvée en 2.2, le nombre maximal de murs d'un pseudo-labyrinthe de taille $n \times 1$ est égal à $(1 - 1) \times 1 + (n - 1) \times 1 = n - 1$.

C'est aussi le nombre de bordures du pseudo-labyrinthe. Une bordure entre deux cellules est soit un mur, soit vide. Ce qui nous conduit à :

Affirmation 2.3.1. *Il y a 2^{n-1} pseudo-labyrinthes de taille $n \times 1$ possibles.*

Démonstration. On démontre l'affirmation avec la formule du cardinal des parties d'un ensemble appliquée à l'ensemble des pseudo-labyrinthes de taille $n \times 1$. $\square$

2.4 Formule générale pour le nombre de pseudo-labyrinthes de taille $n \times m$

Avec $m = 2$ et $m = 3$ le nombre de pseudo-labyrinthe de taille $n \times m$ augmente très rapidement ce qui conforte la formule trouvée en 2.3. Alors :

Affirmation 2.4.1. *Le nombre de pseudo-labyrinthe de taille $n \times m$ quelconques est :*

$$2^{(m-1)n + (n-1)m}$$

Démonstration. On utilise la même preuve que pour l'affirmation précédente. L'exposant est ici le nombre maximal de murs. $\square$

2.5 Labyrinthes de taille 3×2

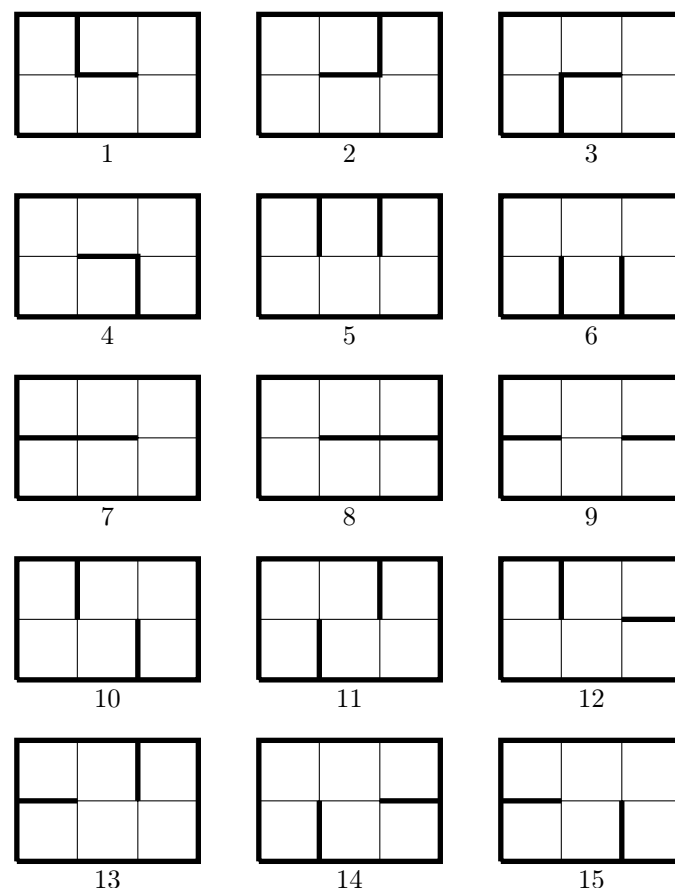


FIGURE 4 – Labyrinthes 3×2

2.6 Observation

On remarque que chaque labyrinthe dessiné en 2.5 possède 2 murs.

2.7 Existence d'un unique chemin vers la sortie

Soit L un labyrinthe. Par définition, il existe toujours un chemin entre chaque cellule car l'espace à l'intérieur de L est connexe.

Démonstration. Montrons par l'absurde que ce chemin est unique. Soit c une cellule quelconque de L , telle qu'il y ait deux chemins différents entre c et la sortie qui ne passent pas plus d'une fois par cellule. On peut donc rajouter un mur à L de sorte à ce qu'il ne reste plus qu'un des deux chemins. On obtient alors un nouveau labyrinthe. Or, par définition, on ne peut rajouter un mur à un labyrinthe sans lui faire perdre sa connexité. Donc L n'est pas un labyrinthe. Ainsi, il existe un chemin entre une cellule quelconque de L et la sortie qui ne passe pas plus d'une fois par cellule. Il ne peut pas y en avoir plusieurs, donc ce chemin est unique. $\square$

2.8 Conjectures pour qu'un pseudo-labyrinthe soit un labyrinthe

Pour être un labyrinthe, un pseudo-labyrinthe doit avoir un bon nombre de murs : on ne peut ni en rajouter (sinon il perd sa connexité), ni en enlever (sinon si on en enlève un, on pourrait rajouter un mur sans perdre la connexité). Ce bon nombre de mur, noté B est égal au nombre maximal de murs, auquel on retire le nombre de bordures qui ne sont pas des murs soit, pour un labyrinthe de taille $n \times m$ quelconque :

$$B = ((m-1)n + (n-1)m) - (nm - 1) = mn - n - m + 1$$

Cependant, cette condition n'est pas suffisante. En voici un contre-exemple :

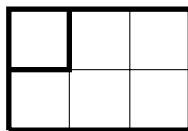


FIGURE 5 – Contre-exemple 3×2

Il faut donc aussi, d'après 2.7, qu'il existe pour chaque cellule un unique chemin vers la sortie qui ne passe pas plus d'une fois par cellule.

2.9 Conclusion

Nous avons donc pu voir dans cette première partie quelques propriétés mathématiques des labyrinthes et pseudo-labyrinthes comme le nombre maximal de murs qu'ils peuvent avoir, le nombre de pseudo-labyrinthe existant pour une certaine dimension donnée ou encore les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un pseudo-labyrinthe soit un labyrinthe. Cependant les problèmes mathématiques concernant les labyrinthes sont encore nombreux. Il peut être intéressant d'utiliser l'outil informatique pour aborder certains d'entre eux tel que leur représentation, leur génération, leur énumération ou encore leur résolution. Les propriétés trouvées lors de cette première partie peuvent ainsi servir de base pour traiter ces problèmes.